

CORRECTION TD - M3

EXERCICES À MAÎTRISER

Ex. n°1 • Glissement sur un plan incliné



3611

1) On a :

$$\vec{P} = m \vec{g} = mg \left[-\cos(\alpha) \vec{u}_z + \sin(\alpha) \vec{u}_x \right] \quad \vec{N} = N \vec{u}_z \quad \vec{T} = -T \vec{u}_x$$

2) Pour le poids :

$$\mathcal{P}(\vec{P}) = mg \left[-\cos(\alpha) \vec{u}_z + \sin(\alpha) \vec{u}_x \right] \cdot v_0 \vec{u}_x = mgv_0 \sin(\alpha) > 0$$

C'est une force motrice : elle contribue à faire glisser le mobile vers le bas.

Pour la réaction normale du support :

$$\mathcal{P}(\vec{N}) = N \vec{u}_z \cdot v_0 \vec{u}_x = 0$$

La force de travail pas.

Pour la réaction tangentielle du support :

$$\mathcal{P}(\vec{T}) = -T \vec{u}_x \cdot v_0 \vec{u}_x = -Tv_0 < 0$$

C'est une force résistive : elle s'oppose au glissement du mobile vers le bas.

3) Puisque $\vec{N}$ ne travaille pas, son travail entre A et B est nul.

Travail du poids.

- On peut travailler avec l'intégrale temporelle. La vitesse étant constante, le temps de parcourt vaut $\tau = \frac{L}{v_0}$.
- On peut travailler avec l'intégrale du travail élémentaire.

$$\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{OM} = mg \left[-\cos(\alpha) \vec{u}_z + \sin(\alpha) \vec{u}_x \right] \cdot dx \vec{u}_x = mg \sin(\alpha) dx$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) &= \int_0^\tau mgv_0 \sin(\alpha) dt = \int_0^L mg \sin(\alpha) dx \\ &= mgv_0 \sin(\alpha) \tau = mgL \sin(\alpha) \\ &= mgh \end{aligned}$$

Puisque $W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = mgh > 0$, on en déduit que le poids a fourni de l'énergie au système.

Travail de la réaction tangentielle :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{T}) = \int_0^L -T dx = -TL$$

Puisque $W_{A \rightarrow B}(\vec{T}) = -TL < 0$, on en déduit que la force a prélevée de l'énergie au système.

4) On applique le TEC entre A et B.

$$\Delta \mathcal{E}_c = W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{T}) \Rightarrow 0 = mgL \sin(\alpha) - TL$$

Ainsi,

$$T = mg \sin(\alpha)$$

On peut également appliquer le TPC. La vitesse étant constante, l'énergie cinétique l'est aussi.

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = 0 = mgv_0 \sin(\alpha) - Tv_0 \Rightarrow T = mg \sin(\alpha)$$

5) Lors de l'aller :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{T}) = \int_0^L (-T \vec{u}_x) \cdot dx \vec{u}_x = \int_0^L -T dx = -TL$$

Lors du retour :

$$W_{B \rightarrow A}(\vec{T}) = \int_L^0 (+T \vec{u}_x) \cdot dx \vec{u}_x = \int_L^0 T dx = -TL$$

Bilan :

$$W_{A \rightarrow B \rightarrow A}(\vec{T}) = -2TL \neq 0$$

Le travail de la force sur un chemin fermé est différent de 0. Cette force n'est donc pas conservative.

Ex. n°2 • Système masse ressort à l'horizontal



5837

1) Le système est soumis à la force de rappel du ressort (force conservative), au poids qui ne travaille pas et à la réaction normale du ressort qui ne travaille pas. Le mouvement est donc bien conservatif.

2) On rappelle l'énergie potentielle élastique :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$$

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On applique le TEM à la masse entre l'instant initial ($x = \ell_0$ et $\dot{x} = v_0$) et l'instant où la longueur du ressort est maximale ($x = x_{max}$ et $\dot{x} = 0$ car la masse fait demi-tour).

$$\Delta\mathcal{E}_m = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}k(x_{max} - \ell_0)^2 \Rightarrow \boxed{x_{max} = \ell_0 + \frac{v_0}{\omega_0}}$$

3) On applique le TPM :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 \right] = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + k(x - \ell_0)\dot{x} = 0$$

On divise par $\dot{x}$ et on divise par m :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0}$$

Ex. n°3 • Chute libre

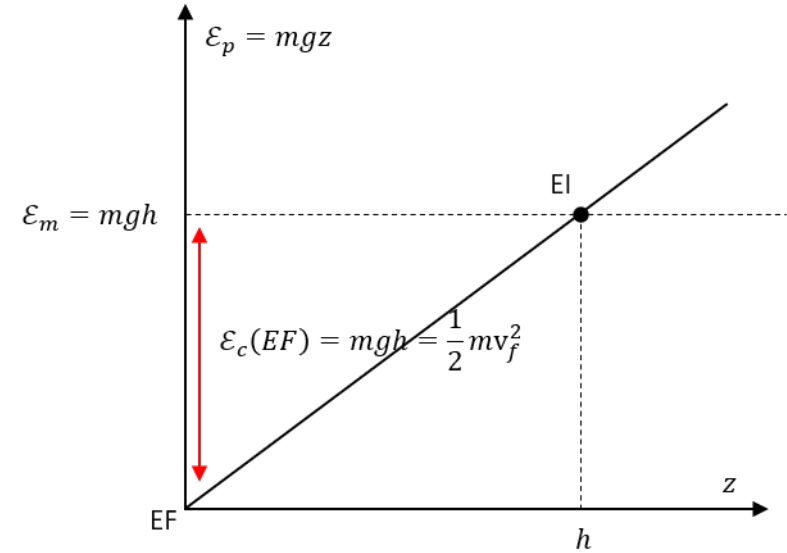


8241

1) L'énergie de potentielle est uniquement de pesanteur et vaut (en supposant un axe z vertical vers le haut) :

$$\mathcal{E}_p = mgz$$

Graphe :



2) C'est un mouvement conservatif, donc le TEM donne :

$$\Delta\mathcal{E}_m = 0 \Rightarrow \underbrace{mgz + 0}_{EI} = 0 + \underbrace{\frac{1}{2}mv_f^2}_{EF} \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{2gh} = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Ex. n°4 • Pendule simple et approximation harmonique



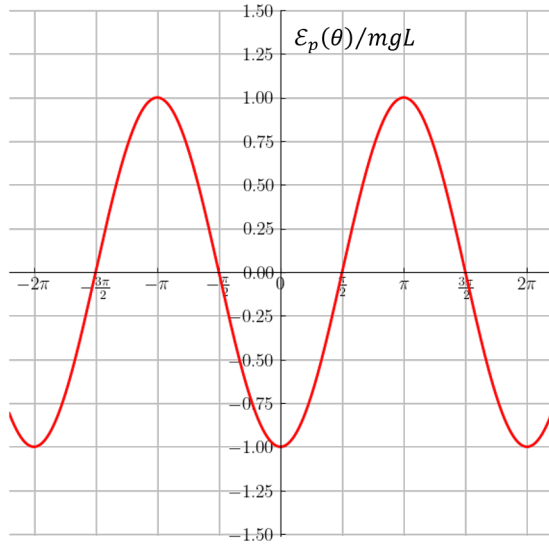
0354

1) Le poids est une force conservatrice et la tension du câble ne travaille pas. Le mouvement est donc conservatif.

2) L'axe x étant orienté vers le bas, l'énergie potentielle vaut :

$$\boxed{\mathcal{E}_p = -mgx = -mgL \cos(\theta)}$$

Graphe :



3) Les minima locaux sont des positions d'équilibre stables. Les maxima locaux sont des positions d'équilibre instables.

4) On rappelle que pour un mouvement circulaire :

$$\vec{OM} = L\vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

On en déduit l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL \cos(\theta)$$

Le TPM donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Rightarrow mL^2\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta} \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0}$$

5) Le TEM entre l'instant initial et un instant quelconque donne :

$$\boxed{\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL \cos(\theta) = -mgL \cos(\theta_0)}$$

6) La masse subit les forces :

$$\begin{cases} \vec{P} = mg[\cos(\theta) \vec{u}_r - \sin(\theta) \vec{u}_\theta] \\ \vec{T} = -T\vec{u}_r \end{cases}$$

L'accélération pour un mouvement circulaire vaut :

$$\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

Le PFD projeté selon $\vec{u}_r$ donne donc :

$$-mL\dot{\theta}^2 = mg \cos(\theta) - T \Rightarrow T = mg \cos(\theta) + mL\dot{\theta}^2$$

Or, d'après la question précédente,

$$\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL \cos(\theta) = -mgL \cos(\theta_0) \Rightarrow mL\dot{\theta}^2 = 2mg[\cos(\theta) - \cos(\theta_0)]$$

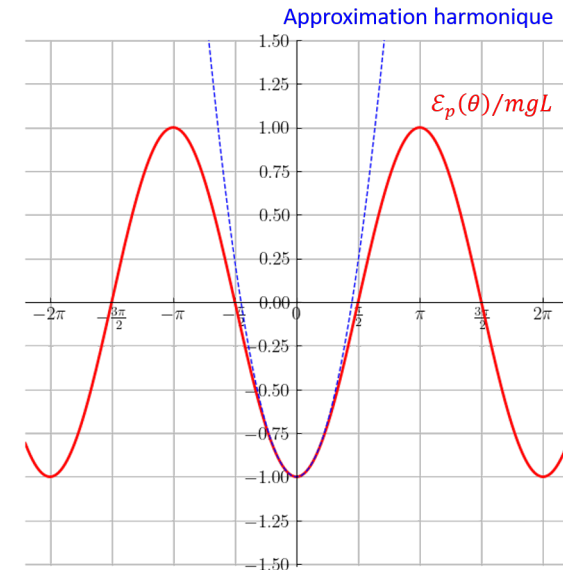
Ainsi,

$$\boxed{T = mg[3 \cos(\theta) - 2 \cos(\theta_0)]}$$

7) Au deuxième ordre, on a :

$$\mathcal{E}_p = -mgL \cos(\theta) \simeq -mgL \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

Graphe :



8) On peut appliquer le TPM :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Rightarrow mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgL\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0}$$

On peut également linéariser directement le PFD :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0}$$

9) L'énoncé précise que : $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

On en déduit :

$$\theta(0) = A = \theta_0$$

Et pour la dérivée :

$$\dot{\theta}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \dot{\theta}(t=0) = B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$$

Bilan :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$$

10) On a directement par définition :

$$\boxed{\dot{\theta}(t) = \omega(t)}$$

On se sert ensuite de l'équation différentielle :

$$\boxed{\dot{\omega}(t) = -\omega_0^2 \sin(\theta(t))}$$

11) Exemple de code :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint
4
5 # RÉSOLUTION ODEINT -----
6
7 ω0 = 1
8
9 def deriv(y, t):
10     dydt = [y[1], -ω0**2 * np.sin(y[0])]
11     return dydt
12
13 t = np.linspace(0, 100, 10000) # Array des temps
14 CI = [179*np.pi/180, 0] # CI : θ(0) = 179° en rad et ω(0) = 0
15 Y = odeint(deriv, CI, t) # Y → array 10000 lignes x 2 colonnes
16
17 θ = Y[:, 0] * 180/np.pi # θ en ° → toutes les lignes (:) de la colonne n°0
18 ω = Y[:, 1] # ω → toutes les lignes (:) de la colonne n°1
19
20 # AFFICHAGE GRAPHIQUE -----
21
22 plt.plot(t, θ, "r-")
23 plt.show()
```

12) Lorsqu'on est dans l'approximation des petits angles, on remarque que les oscillations sont sinusoïdales et isochrones (de même période). Ce n'est plus le cas hors de l'approximation des petits angles.

Ex. n°5 • Amortisseur



7420

1) On a :

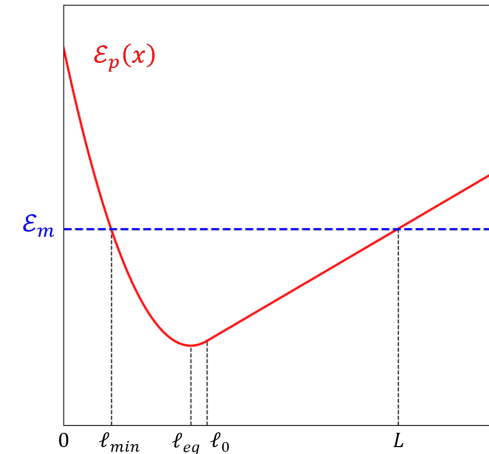
$$\mathcal{E}_{p,p} = mgz \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

Avec z l'axe vertical ascendant.

Dans notre cas, $z = x \sin(\alpha)$ et $\ell = x$. De plus, la masse est en contact avec le ressort uniquement si $x \leq \ell_0$. On en déduit donc :

$$\mathcal{E}_p(x) = \begin{cases} mgx \sin(\alpha) + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 & \text{si } x \leq \ell_0 \\ mgx \sin(\alpha) & \text{si } x \geq \ell_0 \end{cases}$$

2) Graphe :



3) On cherche où la dérivée s'annule (le minimum de la courbe énergie potentielle).

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = 0 = mg \sin(\alpha) + k(x_{eq} - \ell_0) \Rightarrow \boxed{x_{eq} = \ell_0 - \frac{mg \sin(\alpha)}{k}}$$

4) L'énergie cinétique (donc la vitesse) est maximale lorsque l'énergie potentielle est

minimale. Ainsi, le TEM entre $x = L$ et $x = x_{eq}$ donne :

$$\mathcal{E}_m = mgL \sin(\alpha) = \frac{1}{2} m v_{max}^2 + mg x_{eq} \sin(\alpha) + \frac{1}{2} k (x_{eq} - \ell_0)^2$$

5) Le TEM entre $x = L$ et $x = \ell_{min}$ donne :

$$\mathcal{E}_m = mgL \sin(\alpha) = mg \ell_{min} \sin(\alpha) + \frac{1}{2} k (\ell_{min} - \ell_0)^2$$

6) La masse arrive en $x = 0$ avec une vitesse non nulle ($\mathcal{E}_c(0) = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(0) > 0$) et se heurte contre le mur.

Ex. n°6 • Looping



1204

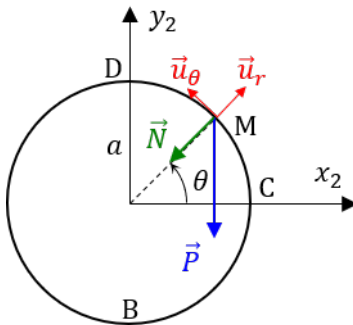
1) On applique le TEM entre les points A et B, sur la voiture, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Seule la réaction normale du support est non conservatrice mais cette force de travail pas. Ainsi,

$$\frac{1}{2} m \underbrace{v_A^2}_{=0} + mg \underbrace{y_A}_{=h} = \frac{1}{2} m v_B^2 + mg \underbrace{y_B}_{=0} \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

2) On applique le TEM entre les points A et M, avec : $y_M = a(1 + \sin(\theta))$ et $v_M = a\dot{\theta}$.

$$mgh = \frac{1}{2} m v_M^2 + mgy_M \Rightarrow \boxed{gh = \frac{1}{2} a^2 \dot{\theta}^2 + ga(1 + \sin(\theta))}$$

3) On définit la base polaire suivante.



Dans cette base :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= mg(-\cos(\theta) \vec{u}_\theta - \sin(\theta) \vec{e}_r) \\ \vec{N} &= -N \vec{u}_r \\ \vec{a} &= -a\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + a\ddot{\theta} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

On applique le PFD sur la voiture, que l'on projette selon $\vec{u}_r$.

$$-ma\dot{\theta}^2 = -mg \sin(\theta) - N \Rightarrow N = ma\dot{\theta}^2 - mg \sin(\theta)$$

On remplace $\dot{\theta}^2$ à l'aide de l'expression de la question précédente.

$$N = m \left(\frac{2gh}{a} - 2g(1 + \sin(\theta)) \right) - mg \sin(\theta) = \boxed{mg \left(\frac{2h}{a} - 2 - 3 \sin(\theta) \right)}$$

4) N est minimale lorsque le sinus est maximal, donc pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

5) En ce point, il faut que N soit toujours strictement positif pour que la voiture ne décolle pas. Ainsi,

$$N_{min} = mg \left(\frac{2h}{a} - 5 \right) > 0 \Rightarrow \boxed{h > \frac{5a}{2} = 11,75 \text{ m}}$$

POUR ALLER PLUS LOIN

Ex. n°7 • Ressort vertical



0906

1) Attention à l'axe z qui est orienté vers le bas. On a :

$$\mathcal{E}_p(z) = -mgz + \frac{1}{2} k (z - \ell_0)^2$$

2) On cherche le point d'annulation de la dérivée :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dz} = -mg + k(z - \ell_0) = 0 \Rightarrow \boxed{z_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

3) On utilise le TPM :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Rightarrow m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} + k\dot{z}(z - \ell_0) = 0$$

On pose : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. On a alors :

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_{eq}$$

Ex. n°8 • Oscillateur amorti

☆☆☆

7637

1) On dérive la position pour avoir la vitesse :

$$v(t) = -2\pi f x_m \sin(2\pi f t)$$

On en déduit la puissance :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\alpha v^2 = -\alpha (2\pi f x_m)^2 \sin^2(2\pi f t) < 0$$

2) Calculons l'intégrale de la puissance :

$$W = \int_0^T \mathcal{P} dt = -\alpha (2\pi f x_m)^2 \int_0^T \sin^2(2\pi f t) dt$$

On utilise le fait que la valeur moyenne de $\sin^2$ vaut $1/2$.

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(2\pi f t) dt = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^T \sin^2(2\pi f t) dt = \frac{T}{2}$$

Or, $T = \frac{1}{f}$. On en déduit :

$$W = -\alpha 2\pi^2 f x_m^2$$

Ex. n°9 • Saut à l'élastique en toute sécurité

☆☆☆

2377

Notons $z = 0$ l'altitude du pont et orientons l'axe vertical vers le bas. On applique le TEM entre l'instant initial ($z = 0$, $v = 0$ et élastique non tendu donc pas de force de rappel) et l'instant le plus bas de la chute, où l'homme fait demi-tour ($z = h$ et $v = 0$).

$$\underbrace{0}_{\mathcal{E}_c} + \underbrace{0}_{\mathcal{E}_{p,p}} = \underbrace{0}_{\mathcal{E}_c} + \underbrace{(-mgh)}_{\mathcal{E}_{p,p}} + \underbrace{\frac{k_0}{2\ell_0} (h - \ell_0)^2}_{\mathcal{E}_{p,el}}$$

Après ré-arrangement des termes, il vient :

$$\ell_0^2 - 2h\lambda \ell_0 + h^2 = 0$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta = 4h^2 (\lambda^2 - 1) > 0$$

On en déduit les deux solutions :

$$\ell_{0,\pm} = h \left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \Rightarrow \ell_m = h \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} \right)$$

On ne garde que la solution avec un signe moins car $\ell_{0,+} > h$ (donc l'homme s'écrase sur le sol). Avec $h = 160$ m, on trouve : $\ell_m = 71,4$ m.

POUR S'ENTRAÎNER AU DS

Ex. n°10 • Puits de potentiel

☆☆☆

4444

1) On est piégé si $\mathcal{E}_m < \max(\mathcal{E}_p) = 0$. Or, l'énergie mécanique (qui se conserve) initial vaut :

$$\mathcal{E}_m = -E + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Pour être piégé dans le puits de potentiel, il faut donc que :

$$v_0 < \sqrt{\frac{2E}{m}} = 0,69 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2) On suppose que : $v_0 > \sqrt{\frac{2E}{m}}$. La conservation de l'énergie mécanique assure que :

$$\mathcal{E}_m = -E + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \Rightarrow v_\infty = v_0 \sqrt{1 - \frac{2E}{mv_0^2}}$$

3) On applique le TPM :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{ER^2}{R^2 + x^2} \right) = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + \frac{ER^2 \times 2x\dot{x}}{(R^2 + x^2)^2} = 0$$

En simplifiant par $\dot{x}$, on obtient :

$$m\ddot{x} + \frac{2ER^2x}{(R^2 + x^2)^2} = 0$$

4) On utilise la développement limité :

$$\frac{1}{1+u^2} = (1+u^2)^{-1} \simeq 1 - u^2$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}_p(x) = -\frac{E}{1+u^2} \simeq -E(1-u^2) \quad \text{avec : } u = \frac{x}{R}$$

On applique le TPM :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - E \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad m \dot{x} \ddot{x} + \frac{2Ex\dot{x}}{R^2} = 0$$

En simplifiant par $\dot{x}$, on obtient :

$$m\ddot{x} + \frac{2Ex}{R^2} = 0$$

On peut également repartir de l'ED du mouvement de la question précédente et faire l'approximation $x \ll R$. On obtient alors :

$$m\ddot{x} + \frac{2ER^2x}{R^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + \frac{2Ex}{R^2} = 0$$

Ex. n°11 • Énergie potentielle linéaire



1724

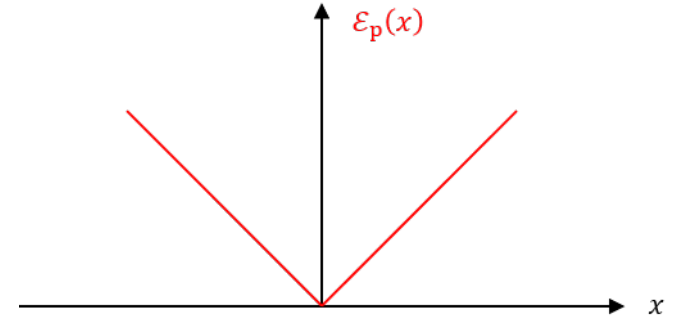
1) On a :

$$\vec{F} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_p = \begin{cases} -F_0x & \text{si : } x < 0 \\ F_0x & \text{si : } x > 0 \end{cases}$$

Puisque la fonction est définie et continue en $x = 0$, on en déduit :

$$\mathcal{E}_p(x) = F_0 |x|$$

Graphes :



2) Puisque $\mathcal{E}_p$ tend vers $+\infty$ pour $x = \pm\infty$, alors le point matériel ne peut pas partir à l'infini.

3) On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre l'état initial ($x = 0, v = v_0$) et la position extrême ($x = x_{max}, v = 0$). On a :

$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = F_0x_{max} + 0 \quad \Rightarrow \quad x_{max} = \frac{mv_0^2}{2F_0}$$

4) On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre l'état initial ($x = 0, v = v_0$) et une position quelconque tel que $0 \leq x \leq x_{max}$. On a :

$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = F_0x + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = v_0 \sqrt{1 - \frac{x}{x_{max}}}$$

5) On en déduit :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \sqrt{1 - \frac{x}{x_{max}}} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dx}{v_0 \sqrt{1 - \frac{x}{x_{max}}}}$$

Le mouvement du point matériel de $x = 0$ à x_{max} correspond à un quart de période T . Ainsi,

$$T = 4 \times \int_0^{x_{max}} \frac{dx}{v_0 \sqrt{1 - \frac{x}{x_{max}}}} = \frac{4x_{max}}{v_0} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}}$$

On a posé : $u = x/x_{max}$. On a donc :

$$T = \frac{4x_{max}}{v_0} \left[-2\sqrt{1-u} \right]_0^1 = \frac{8x_{max}}{v_0} = \frac{4mv_0}{F_0}$$

1) Pour $i = 1, 2, 3$, on a :

$$\vec{F}_i = -\frac{d\mathcal{E}_{pi}}{dr}\vec{u}_r$$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{F}_1 = \frac{nRT_0}{a+r}\vec{u}_r \quad \vec{F}_2 = -\frac{nRT_0}{a-r}\vec{u}_r \quad \vec{F}_3 = m\omega^2 r\vec{u}_r}$$

2) On a :

$$\mathcal{E}'_p(r) = -\frac{nRT_0}{a+r} + \frac{nRT_0}{a-r} - m\omega^2 r = r \left(\frac{2nRT_0}{a^2 - r^2} - m\omega^2 \right)$$

On constate que $r_0 = 0$ est bien solution de cette équation. Il s'agit donc d'une position d'équilibre.

3) Cherchons $r \neq 0$ également solution de l'équation. On a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2nRT_0}{a^2 - r^2} - m\omega^2 \right) &= 0 \Rightarrow a^2 - r^2 = \frac{2nRT_0}{m\omega^2} \\ \Rightarrow r^2 &= a^2 \left(1 - \frac{2nRT_0}{ma^2\omega^2} \right) \\ \Rightarrow r_{\pm} &= \pm a \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2} \end{aligned}$$

Ces solutions existent lorsque $\omega > \omega_c$.

4) Calculons la dérivée seconde $\mathcal{E}''_p(r)$

$$\mathcal{E}''_p(r) = 2nRT_0 \frac{(a^2 - r^2) - r(-2r)}{(a^2 - r^2)^2} - m\omega^2$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}''_p(0) = \frac{2nRT_0}{a^2} - m\omega^2 = m(\omega_c^2 - \omega^2)$$

La position d'équilibre est stable ($\mathcal{E}''_p(0) > 0$) si $\omega < \omega_c$ et instable ($\mathcal{E}''_p(0) < 0$) si $\omega > \omega_c$.

5) L'état d'équilibre stable en 0 correspond au graphe de gauche (minimum de l'énergie potentielle). Donc gauche : $\omega < \omega_c$ et droite : $\omega > \omega_c$.

6) Première méthode : on a montré dans le cours que

$$\mathcal{E}''_p(0) = m(\omega_c^2 - \omega^2) = k$$

et que toute énergie est équivalente à une énergie potentielle élastique proche d'une position d'équilibre (r proche de $r_0 = 0$)

$$\mathcal{E}_p(r) \simeq \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 = \frac{1}{2}kr^2$$

On en déduit donc la relation demandée :

$$\boxed{\mathcal{E}_p(r) \simeq \frac{1}{2}m(\omega_c^2 - \omega^2)r^2}$$

Deuxième méthode : on réalise un développement limité à l'ordre 2 de la fonction énergie potentielle

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p(r) &\simeq -nRT_0 \left[\frac{r}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] - nRT_0 \left[-\frac{r}{a} - \frac{1}{2} \left(-\frac{r}{a} \right)^2 \right] - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \\ &= \frac{2nRT_0}{a^2} r^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\omega_c^2 - \omega^2) r^2 \end{aligned}$$

7) On applique le TPM :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\omega_c^2 - \omega^2)r^2 \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{r} + (\omega_c^2 - \omega^2)r = 0}$$

Il s'agit bien d'un oscillateur harmonique de pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$.